土木学会論文集B1(水工学) Vol.69, No.4, I_1147-I_1152, 2013.

# 砂州性蛇行の形成に関する線形安定解析
LINEAR STABILITY ANALYSIS ON THE MEANDER FORMATION ORIGINATED BY ALTERNATE BARS

島田 龍市[1]・清水康行[2]・長谷川和義[3]・伊賀久晃[4]
Ryuichi Shimada, Yasuyuki Shimizu, Kazuyoshi Hasegawa and Hisaaki Iga

[1]学生会員　北海道大学工学院環境フィールド工学部門（〒060-8628　北海道札幌市北区北13条西8丁目）
[2]正会員　工博　北海道大学工学院教授　（〒060-8628　北海道札幌市北区北13条西8丁目）
[3]フェロー会員　工博　株式会社北開水工コンサルタント 先端技術開発センター
（〒060-0005 北海道札幌市中央区北5条西6丁目2番地）
[4]正会員 株式会社北開水工コンサルタント 札幌支店（〒062-0052 北海道札幌市豊平区月寒東2条20丁目5番10号）

There are two theories about the origin of river meanders: one is based on the bed-instability theory and another one is on the bend-instability theory. According to the bed-instability theory, the meanders will be developed due to alternate bars on the bed. Although this theory was occasionally denied in the bend-instability theory because of reasons that typical wave number of developed alternate bars falls in the stable range of bend instability and so on, meanders induced by alternate bars are often seen in natural rivers in Japan. The theoretical verification of this kind of meander generation is required.

In this study, the linear stability analysis is applied to the straight channel with erodible banks in order to obtain the characteristics of the meanders. The results indicate that meanders induced by alternate bars will exist and they have longer wavelength than that from previous bar-theory. And, it was found that Froude number is the one of the parameter that affects the wavelength of these meander types.

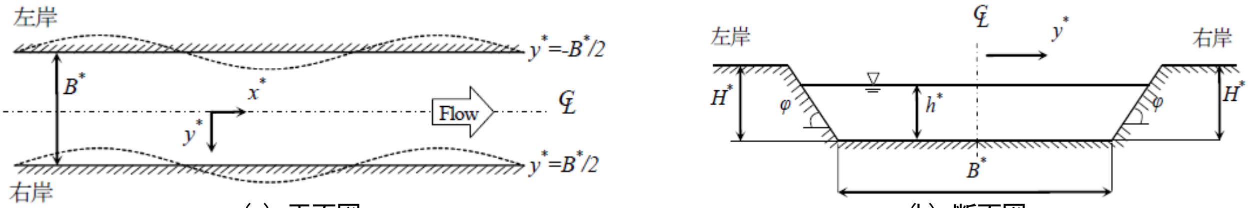
***Key Words :*** *meanders, alternate bars , bank erosion, linear stability analysis, bend-instability, bed-instability*

## 1. はじめに

近年，自然環境の再生が多方面で試みられるようになり，川の蛇行復元もその中の主要課題になっている．また，昨年の音更川のように，流路蛇行による大規模河岸浸食の発生が一応の整備を終えた河川の安全を脅かす事例[1]も起こっている．これらを背景として，蛇行関連研究があらためて注目されている．

今日までの沖積蛇行に関する研究は膨大な数にのぼる．特に成因に関する研究は川がなぜ曲がるのかという問いに答えるものであり，蛇行流路の処理法を考える上でも重要な視点を提供する．

現在，沖積蛇行の成因に関して二つの有力な説がある．その１つは，木下[2)3)]によって提唱された交互砂州（砂礫堆）成因説であり，直線水路内おいて発生する交互砂州が水流の蛇行を喚起し，さらに流路の蛇行を呼び起こすと考えるものである．この考えは蛇行研究に非常に大きな影響を与え，1960年代以降世界中で交互砂州に関する理論研究が始められた[4)]．流れモデルや流砂量の取り扱いに違いがあるが，多くが線形化方程式系における河床不安定を問題として発生条件や卓越波長を導いている．沖積蛇行の成因に関するもう一つの説は，Engelund[5)]の蛇行流路内平衡底面形状に関する研究に影響を受けて始まった池田・日野・吉川[6)]，Ikeda Parker Sawai[7)]の平面不安定説である．この研究は，流路の初期状態に含まれる微小な湾曲が主流の平面的な偏りを生みだし，河岸を浸食することによって湾曲が成長すると考えるもので，その後Blondeaux Seminara[8)]，Tubino Seminara[9)]などのイタリア研究者によってさまざまな発展が試みられた．このうち，Blondeaux Seminara[8)]の研究では，交互砂州の卓越波長と平面不安定の卓越蛇行波長の比較がなされており，後者が前者の３倍ほど大きく実測値に近いこと，この波長に対応する砂州の成長率がほぼゼロ（中立不安定）であることを示した．彼らはこの現象を一種の共振現象（レゾナンス）とみなしている．これらの成果をもとにSeminara[10)]は，湾曲機構が河川蛇行のさまざまな性質を説明できる唯一の機構であると結論づけ，交互砂州は流




(a) 平面図　　(b) 断面図

図-1 対象水路概要

路蛇行の主要な成因ではないとしている．しかしながら，本邦では交互砂州を契機とした蛇行や河岸浸食が各所に見られ，砂州性蛇行の存在は否定できない．砂州から流路蛇行への発達を扱った解析研究は非常に少ないが，その一つにMosselman[11]があり，側岸浸食を伴う河床不安定解析に先鞭をつけた．ただし，粘着性河岸を対象としているほか，定常解析にとどまるなど制約が多い．

本研究は，砂礫河岸からなる直線状水路において河床砂州の発達が河岸の蛇行を引き起こす場合を対象として線形安定解析を試みたものである．従来の交互砂州解析は，河床起伏の横断方向表現に両岸固定壁を境界とする固有関数を仮定してきたため，砂州に伴う水流蛇行を河道蛇行に直接結び付けることができなかった．本研究では河床起伏を固有関数表示せず，横断方向流速の両岸境界条件を運動学的条件とすることによって水流蛇行が河道平面形状の変形に反映するようにしている．ただし，これらを表現する方程式系が斉次式となるため，直接河岸形状を求めることはできないが，砂州性蛇行解析の第１歩になるものと考える．なお，線形解析は河床地形等に関し初期直線等流状態からの微小な周期変動の発達を扱うものであり，その成長率の極大となる波長がその後の現象を支配するものと想定している．その妥当性の検証は波長などの実測値との比較による他はなく，本論文においても実験値との比較がなされている．

## ２．砂州性蛇行の概要

木下[2)3)]は，交互砂州の発生・発達、流路蛇行への移行を体系的にまとめ，向きの異なる1組の砂州によって１蛇行する「蛇曲」と，1蛇行中3以上の砂州によって特徴づけられる「迂曲」の存在を示している．概して河床勾配がきつく河床材料が粗い本邦河川では，これらの形態はごく一般的であり，砂州の発生・発達・減衰は河川改修にとって重要な視点となっている．本研究ではこの種の河道蛇行を「砂州性蛇行」と呼ぶことにする．Seminara[10)]は蛇行研究レビューの中で，①交互砂州は，蛇行を形成するには移動速度が大きすぎること．②通常の交互砂州の無次元波数（$\pi B^*/L^*$，　$B^*$=川幅，$L^*$=砂州波長）は0.5ほどであり，湾曲不安定の安定領域に入ること．③交互砂州は弱蛇行流路において共存移動し，砂州が河川蛇行の固定砂州に変化するというアイデアと矛盾することなどを指摘して，交互砂州成因説を退けている．これらの主張をめぐっては，蛇行の定義も関係する．前者は水流の蛇行も視野に入れた水衝部に重点を置く見方であるのに対し，後者は河道全体の湾曲の連なりを問題にしている．両者はいずれも存在すると考えるべきであろう．

## ３．定式化

### (1) 基礎式

本研究では初期状態として平面的に直線かつ側岸に傾斜を有する開水路を対象に安定解析を行う．図-1に対象水路概要および座標系を示す．

ここで河床変動および側岸の移動は流れの変化と比較し十分に遅いと仮定し，流れの方程式には以下のデカルト座標上の準定常浅水流方程式を用いる．

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}+g^*\frac{\partial z_b^*}{\partial x^*}+g^*\frac{\partial h^*}{\partial x^*}+\frac{g^*}{C^{*2}h^*}\sqrt{u^{*2}+v^{*2}}\,u^*=0 \quad (1)$$

$$u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}+g^*\frac{\partial z_b^*}{\partial y^*}+g^*\frac{\partial h^*}{\partial y^*}+\frac{g^*}{C^{*2}h^*}\sqrt{u^{*2}+v^{*2}}\,v^*=0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u^*h^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*h^*}{\partial y^*}=0 \quad (3)$$

ここで$x^*$,$y^*$: 流下方向および横断方向座標，$u^*$,$v^*$: $x^*$, $y^*$方向の流速，$z_b^*$: 河床高，$h^*$: 水深，$g^*$: 重力加速度，$C^*$: Chezy係数を表す．また，添え字*は有次元量を表す．

また，流砂平衡式については空隙を含む見かけの流砂量を取り扱う以下の式を用いる．

$$\frac{\partial z_b^*}{\partial t^*}+\frac{\partial S_x^*}{\partial x^*}+\frac{\partial S_y^*}{\partial y^*}=0 \quad (4)$$

ここで$t^*$: 時間，$S_x^*$, $S_y^*$: 河床における空隙を考慮した流下方向および横断方向流砂量を表す．

流砂は掃流砂のみを対象とし，流下方向にはMeyer-Peter・Müller式を，横断方向にはMosselman[11)]による横断方向平均流，流線曲率効果，横断方向河床勾配を考慮した以下の式を用いる．

$$S_x^*=8(\tau_*-\tau_{*c})^{3/2}\frac{\sqrt{sg^*d^{*3}}}{1-\lambda_p} \quad (5)$$

$$S_y^*=S_x^*\left(\frac{v^*}{u^*}+A\frac{h^*}{u^*}\frac{\partial v^*}{\partial x^*}-\sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\mu_s\mu_k\tau_*}}\frac{\partial z_b^*}{\partial y^*}\right) \quad (6)$$

ここで$\tau_*$：無次元掃流力，$\tau_{*c}$：無次元限界掃流力，$s$：砂の水中比重，$d^*$：粒径，$\lambda_p$：砂の空隙率，$A$：2次流影響の重み係数 (=7～11)，$\mu_s$：静止摩擦係数 (=0.6)，$\mu_k$：動摩擦係数 (=1.0) を表す．

### (2) 側岸浸食モデル

本研究では側岸浸食による河床への土砂供給について斜面掃流浸食モデルを用いる．斜面上の掃流砂については平野[12)]や長谷川[13)]を参考とした次式を用いる．

$$S_{x\varphi}^{*}=8\left(\sqrt{\left(\frac{\varepsilon\tau_{*}}{\tau_{*c}\cos\varphi}\right)^{2}+\left(\frac{\tan\varphi}{\mu_s}\right)^{2}}-1\right)^{3/2}\tau_{*c\varphi}{}^{3/2}\frac{\sqrt{sg^{*}d^{*3}}}{1-\lambda_p} \tag{7}$$

ここで $S_{x\varphi}^{*}$：斜面上における見かけの流下方向流砂量，$\varphi$：側岸の傾斜角，$\varepsilon$：側岸におけるせん断力の補正係数(=0.6～0.8)，$\tau_{*c\varphi}$：斜面上の無次元限界掃流力を表す．$\tau_{*c\varphi}$は以下のように表すことができる．

$$\tau_{*c\varphi}=\tau_{*c}\cos\varphi\sqrt{1-\left(\frac{\tan\varphi}{\mu_s}\right)^{2}} \tag{8}$$

掃流浸食モデルでは，側岸浸食による河床への土砂の供給は河床上の横断方向流砂量と類似した挙動をとると仮定し，以下のように表す．

$$S_{bankR}^{*}=S_{x\varphi}^{*}\left(\left.\frac{v^{*}}{u^{*}}\right|_{y^{*}=B_R}+A\frac{h^{*}}{u^{*}}\left.\frac{\partial v^{*}}{\partial x^{*}}\right|_{y^{*}=B_R}-\tan\varphi\sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\mu_s\mu_k\tau_{*R}}}\right) \tag{9}$$

$$S_{bankL}^{*}=S_{x\varphi}^{*}\left(\left.\frac{v^{*}}{u^{*}}\right|_{y^{*}=-B_L}+A\frac{h^{*}}{u^{*}}\left.\frac{\partial v^{*}}{\partial x^{*}}\right|_{y^{*}=-B_L}+\tan\varphi\sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\mu_s\mu_k\tau_{*L}}}\right) \tag{10}$$

ここで$S^{*}_{bank}$：側岸からの土砂供給量，$B_R^{*}, B_L^{*}$：右岸及び左岸の座標値を表す．また，添え字*R*及び*L*はそれぞれ右岸，左岸の値であることを表す．

また，本研究では川幅変化に関する支配方程式として掃流浸食モデルを組み込むParkerら[15)]の式において，曲率項を0としたものを用いる．

$$\frac{\partial B_R^{*}}{\partial t^{*}}=\frac{1}{\tan\varphi-\left.\partial z_b^{*}/\partial y^{*}\right|_{y^{*}=B_R^{*}}}\left(-\tan\varphi\frac{S_{bankR}^{*}}{H^{*}}+\left.\frac{\partial z_b^{*}}{\partial t^{*}}\right|_{y^{*}=B_R^{*}}\right) \tag{11}$$

$$\frac{\partial B_L^{*}}{\partial t^{*}}=\frac{1}{\tan\varphi-\left.\partial z_b^{*}/\partial y^{*}\right|_{y^{*}=-B_L^{*}}}\left(\tan\varphi\frac{S_{bankL}^{*}}{H^{*}}+\left.\frac{\partial z_b^{*}}{\partial t^{*}}\right|_{y^{*}=-B_L^{*}}\right) \tag{12}$$

ここで，$H^{*}$: 天端高を表す．

### (3) 境界条件

右岸，左岸において①横断方向流速が水面波の運動学的条件と同様な規定を受ける，②側岸における横断方向河床流砂量は側岸からの土砂供給量に等しいという合計4つを用いる．これより，

$$\left.\frac{\partial B_R^{*}}{\partial t^{*}}\right|_{y^{*}=B_R^{*}}+u^{*}\left.\frac{\partial B_R^{*}}{\partial x^{*}}\right|_{y^{*}=B_R^{*}}=\left.v^{*}\right|_{y^{*}=B_R^{*}} \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial B_L^{*}}{\partial t^{*}}\right|_{y^{*}=-B_L^{*}}+u^{*}\left.\frac{\partial B_L^{*}}{\partial x^{*}}\right|_{y^{*}=-B_L^{*}}=-\left.v^{*}\right|_{y^{*}=-B_L^{*}} \tag{14}$$

$$\left.S_y^{*}\right|_{y^{*}=B_R^{*}}=S_{bankR}^{*} \tag{15}$$

$$\left.S_y^{*}\right|_{y^{*}=-B_L^{*}}=S_{bankL}^{*} \tag{16}$$

### (4) 基礎式の線形化及び無次元化

平坦床等流状態を基本状態とし，以下のように摂動展開を行う．

$$\left(u^{*},v^{*},h^{*},z_b^{*},B_R^{*},B_L^{*}\right)=\left(u_0^{*},0,h_0^{*},z_{b0}^{*},B_0^{*}/2,B_0^{*}/2\right)+\left(u^{*}{}'',v^{*}{}'',h^{*}{}'',z_b^{*}{}'',B_R^{*}{}',B_L^{*}{}'\right) \tag{17}$$

ここで添え字0は基本状態を表し，プライムは摂動量であり，ダブルプライムは$x^{*}, y^{*}, t^{*}$の関数，シングルプライムは$x^{*}$, $t^{*}$の関数であること表す．また，基本状態においては側岸からの土砂供給はないものと仮定する．さらに，以下を用いて基礎式の無次元化も行う．

$$\left(u^{*}{}'',v^{*}{}''\right)=u_0^{*}\left(u'',v''\right),\quad\left(h^{*}{}'',z_b^{*}{}'',H^{*}\right)=h_0^{*}\left(h'',z_b'',H\right)$$
$$\left(x^{*},y^{*},B_R^{*}{}',B_L^{*}{}'\right)=B_0^{*}\left(x,y,B_R{}',B_L{}'\right),\quad t^{*}=\frac{B_0^{*}h_0^{*}}{S_{x0}^{*}}t \tag{18}$$

ここで*のついていないものは無次元量を表す．式(17), (18)を基礎式に代入し，摂動項を抽出すると以下の6つの無次元化された線形化基礎式が得られる．

$$\frac{\partial z_b''}{\partial t}+G_0\frac{\partial u''}{\partial x}+\frac{\partial v''}{\partial y}+\frac{A}{\beta}\frac{\partial^2 v''}{\partial x\partial y}-\frac{1}{\beta f\left(\tau_{*0}\right)}\frac{\partial^2 z_b''}{\partial y^2}=0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial u''}{\partial x}+\frac{1}{F_0^2}\frac{\partial\left(z_b''+h''\right)}{\partial x}+2C_f\beta u''-C_f\beta h''=0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial v''}{\partial x}+\frac{1}{F_0^2}\frac{\partial\left(z_b''+h''\right)}{\partial y}C_f\beta u''=0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial u''}{\partial x}+\frac{\partial v''}{\partial y}+\frac{\partial h''}{\partial x}=0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial B_R''}{\partial t}=\frac{G_1}{H}\frac{\tan\varphi}{f\left(\tau_{*0}\right)}\left.u''\right|_{y=B_R}+\frac{1}{\beta\tan\varphi}\left.\frac{\partial z_b''}{\partial t}\right|_{y=B_R} \tag{23}$$

$$\frac{\partial B_L''}{\partial t}=\frac{G_1}{H}\frac{\tan\varphi}{f\left(\tau_{*0}\right)}\left.u''\right|_{y=-B_L}+\frac{1}{\beta\tan\varphi}\left.\frac{\partial z_b''}{\partial t}\right|_{y=-B_L} \tag{24}$$

ここで，係数は以下のように表される．

$$G_0=\frac{3\tau_{*0}}{\tau_{*0}-\tau_{*c}},\quad G_1=\varepsilon G_0\sqrt{\frac{\varepsilon\tau_{*0}-\cos\varphi\tau_{*c}}{\tau_{*0}-\tau_{*c}}}\left\{1-\left(\frac{\tan\varphi}{\mu_s}\right)^{2}\right\}^{3/4} \tag{25}$$

$$F_0=\frac{u_0^{*}}{\sqrt{g^{*}h_0^{*}}},\quad\beta=\frac{B_0^{*}}{h_0^{*}},\quad C_f=\frac{g^{*}}{C^{*2}} \tag{26}$$

$$f\left(\tau_{*0}\right)=\sqrt{\frac{\mu_s\mu_k\tau_{*0}}{\tau_{*c}}} \tag{27}$$

### (5) 線形安定解析

摂動項が以下に示すフーリエ級数で表されるとする．

$$\left(u'',v'',h'',z_b''\right)=\left(u,v,h,z_b\right)\exp\left\{i\left(kx-ct\right)\right\}+c.c. \tag{28}$$

ここで*k*: 摂動の無次元波数(=2πB*/L*)，$L^{*}$: 波長，*c*: 摂動の複素角周波数，*i*: 虚数単位を表し，*c.c.*は共役複素数を表す．また*u*，*v*，*h*，$z_b$は*y*のみの関数である．これらを式(19)，(20)，(21)，(22)に代入すると以下が得られる．

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2'\frac{d}{dy} & 0 & \left(a_4'+a_4''\right)\frac{d^2}{dy^2} \\ a_5 & 0 & a_7 & a_8 \\ 0 & a_{10} & a_{11}'\frac{d}{dy} & a_{11}'\frac{d}{dy} \\ a_{13} & a_{14}\frac{d}{dy} & a_{13} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ h \\ z_b \end{pmatrix}=0 \tag{29}$$

$$a_1 = ikG_0,\quad a_2' = 1 + \frac{ikA}{\beta},\quad a_4' = -ikc,\quad a_4'' = -\frac{1}{\beta f(\tau_{*0})}$$
$$a_5 = ik + 2\beta C_f,\quad a_7 = \frac{ik}{F_0^2} - \beta C_f,\quad a_8 = \frac{ik}{F_0^2} \tag{30}$$
$$a_{10} = ik + \beta C_f,\quad a_{11}' = \frac{1}{F_0^2},\quad a_{13} = ik,\quad a_{14} = 1$$

整理すると，以下に示す$v$に関する4階線形微分方程式が得られる．

$$\frac{d^4 v}{dy^4} + A_1 \frac{d^2 v}{dy^2} + A_2 v = 0 \tag{31}$$

$$A_1 = \frac{1}{a_{11}' a_4' a_5}\left\{a_{11}'^2 \left(a_4' a_5 + a_1 a_7 - a_1 a_8\right) + a_{11}' a_2' a_8 \left(a_5 - a_7 + a_8\right) + a_{10} a_8 a_4'' \left(a_7 - a_5\right)\right\} \tag{32}$$

$$A_2 = \frac{a_8 a_{10}\left\{a_4'\left(a_7 - a_5\right) + a_1 a_8\right\}}{a_{11}' a_4' a_5} \tag{33}$$

これらから，$v$，$z_b$，$u$の一般解を以下のように得る．

$$v = C_1 e^{\sqrt{\mu_1} y} + C_2 e^{-\sqrt{\mu_1} y} + C_3 e^{\sqrt{\mu_2} y} + C_4 e^{-\sqrt{\mu_2} y} \tag{34}$$

$$z_b = \left(A_3\sqrt{\mu_1} + \frac{A_4}{\sqrt{\mu_1}}\right)\left(C_1 e^{\sqrt{\mu_1} y} - C_2 e^{-\sqrt{\mu_1} y}\right) + \left(A_3\sqrt{\mu_2} + \frac{A_4}{\sqrt{\mu_2}}\right)\left(C_3 e^{\sqrt{\mu_2} y} - C_4 e^{-\sqrt{\mu_2} y}\right) \tag{35}$$

$$u = -L_1\left(C_1 e^{\sqrt{\mu_1} y} - C_2 e^{-\sqrt{\mu_1} y}\right) - L_2\left(C_3 e^{\sqrt{\mu_2} y} - C_4 e^{-\sqrt{\mu_2} y}\right) \tag{36}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\left(-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2}\right),\quad \mu_2 = \frac{1}{2}\left(-A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2}\right) \tag{37}$$

$$A_3 = \frac{a_5}{a_8 a_{11}'\left(a_8 - a_7 + a_5\right)},\quad A_4 = \frac{\left(a_7 - a_5\right) a_8 a_{10}}{a_8 a_{11}'\left(a_8 - a_7 + a_5\right)} \tag{38}$$

$$L_j = \frac{a_2'}{a_1}\sqrt{\mu_j} + \frac{a_4'}{a_1}\left(A_3\sqrt{\mu_j} + \frac{A_4}{\sqrt{\mu_j}}\right) + \frac{a_4''}{a_1}\left(A_3\mu_j + A_4\right)\sqrt{\mu_j},\quad (j = 1,2) \tag{39}$$

ここで$C_1$，$C_2$，$C_3$，$C_4$は未定定数である．式(13)，(14)，(15)，(16)の境界条件を適用し，側岸が移動しても川幅の変化はない条件（$B_R$+$B_L$=1）が維持されるとすると$C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$に関する以下の方程式が得られる．

$$\begin{pmatrix} D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \\ D_5 & D_6 & D_7 & D_8 \\ D_9 & D_{10} & D_{11} & D_{12} \\ D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 e^{\sqrt{\mu_1}/2} \\ C_2 e^{-\sqrt{\mu_1}/2} \\ C_3 e^{\sqrt{\mu_2}/2} \\ C_4 e^{-\sqrt{\mu_2}/2} \end{pmatrix} = 0 \tag{40}$$

$$D_1 = 1 - T_1(1 - c\gamma)\left(A_3\sqrt{\mu_1} + \frac{A_4}{\sqrt{\mu_1}}\right) + \frac{G_1 T_2 L_1}{H}\left(\gamma - \frac{1}{c}\right)$$
$$D_2 = 1 + T_1(1 - c\gamma)\left(A_3\sqrt{\mu_1} + \frac{A_4}{\sqrt{\mu_1}}\right) - \frac{G_1 T_2 L_1}{H}\left(\gamma - \frac{1}{c}\right)$$
$$D_3 = 1 - T_1(1 - c\gamma)\left(A_3\sqrt{\mu_2} + \frac{A_4}{\sqrt{\mu_2}}\right) + \frac{G_1 T_2 L_2}{H}\left(\gamma - \frac{1}{c}\right)$$
$$D_4 = 1 + T_1(1 - c\gamma)\left(A_3\sqrt{\mu_2} + \frac{A_4}{\sqrt{\mu_2}}\right) - \frac{G_1 T_2 L_2}{H}\left(\gamma - \frac{1}{c}\right)$$
$$D_5 = D_2 e^{-\sqrt{\mu_1}},\quad D_6 = D_1 e^{\sqrt{\mu_1}},\quad D_7 = D_4 e^{-\sqrt{\mu_2}},\quad D_8 = D_3 e^{\sqrt{\mu_2}} \tag{41}$$
$$D_9 = -\frac{\beta G_1 L_1 \tan\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} - \left(A_3\mu_1 + A_4\right),\quad D_{10} = \frac{\beta G_1 L_1 \tan\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} - \left(A_3\mu_1 + A_4\right)$$
$$D_{11} = -\frac{\beta G_1 L_2 \tan\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} - \left(A_3\mu_2 + A_4\right),\quad D_{12} = \frac{\beta G_1 L_2 \tan\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} - \left(A_3\mu_2 + A_4\right)$$
$$D_{13} = e^{-\sqrt{\mu_1}}\left\{-\frac{\beta G_1 L_1 \tan\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} + \left(A_3\mu_1 + A_4\right)\right\},\quad D_{14} = e^{\sqrt{\mu_1}}\left\{\frac{\beta G_1 L_1 \tan\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} + \left(A_3\mu_1 + A_4\right)\right\}$$
$$D_{15} = e^{-\sqrt{\mu_2}}\left\{-\frac{\beta G_1 L_2 \tan\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} + \left(A_3\mu_2 + A_4\right)\right\},\quad D_{16} = e^{\sqrt{\mu_2}}\left\{\frac{\beta G_1 L_2 \tan\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} + \left(A_3\mu_2 + A_4\right)\right\}$$

$$T_1 = \frac{ik}{\beta\tan\varphi},\quad T_2 = \frac{\tan\varphi}{f(\tau_{*0})},\quad \gamma = \frac{S_{x0}^*}{u_0^* h_0^*} \tag{42}$$

式(40)が有意な解を持つためには，係数行列のデターミナントが0となる条件が必要となる．これにより摂動の複素角周波数$c$を得ることができる．式が複雑であり解析的に解くのが困難であるので，数値計算にて解を得る必要がある．$c$の実部Re[$c$]は摂動の移動速度を，無次元波数$k$との積の虚部Im[$kc$]は摂動の増幅率を表す．

## 4．解析結果と考察

### (1) 実験結果・数値計算結果との比較

本安定解析結果の妥当性を検討するために実験結果との比較を行う．比較対象として，Akahoriら[14]の複断面直線水路の蛇行実験の結果を用いる．実験は浸食性河岸を有する長さ50m，初期幅40cm，全幅90cmの直線複断面水路で行われ，40時間通水した．河床材料粒径は$d^*$=0.76mmを用いている．表-1に40時間後の水理量の測定値を示す．図-2は時間経過ごとの河床高の測定値を示している．

また，実験では幅の拡幅に制約があるため，初期条件を実験と同様にした実験的数値計算を行い，実験よりも大きな振幅の蛇行を発生させた．表-2に数値計算の最終結果を，図-3には数値計算における水深の時間変化を示す．数値計算には河川解析ソフトIRIC2.0[16]に搭載されている平面二次元の河床変動モデルを用いた．計算格子は主流方向，横断方向それぞれ491×61分割とした．

実験結果及び数値計算結果のいずれも交互砂州の発達から流路の蛇行へと発展しており，砂州性蛇行の存在を示唆しているものと考えられる．これらの最終結果をもとに本研究で得られた安定解析を試みると図-4，図-5のような結果が得られる．まず実験についての不安定解析結果では，成長率のピークが無次元波数$k$=0.45で現れ，これにより卓越波長を計算すると$L^*$=12.5mとなる．一方，観測された蛇行波長16.0mである．一般に砂州現象は大きなばらつきを示すものであり，その意味では近い値であると判断できる．また，数値計算についての解析結果は，成長率ピークが$k$=0.325で現れ，卓越波長を計算すると$L^*$=10.4mとなり，数値計算で得られた波長9.3mと近い値となる．したがって，実験，数値計算のいずれの場合の蛇行波長とも良好に合致する結果となり，安定解析の結果が十分妥当であるといえる．

### (2) 先行理論との比較

図-6はBlondeux Seminara[8]による平面不安定理論および交互砂州理論を用いて前述の実験及び数値計算と同条件で解析行ったものである．この理論では無次元波数$\lambda$は半幅で無次元化されている点に注意されたい．

実験(図-6(a)）について平面不安定理論および交互砂州

表-1 実験終了時(40時間後)の水理量

| 流量 $Q[l/s]$ | 水路幅 $B[cm]$ | 河床勾配 $i$ | 水深 $h[cm]$ | 蛇行波長 $L\ [m]$ |
|---|---|---|---|---|
| 6.4 | 89.4 | 1/200 | 2.37 | 16.0 |

表-2 数値計算による結果(14時間後)

| 流量 $Q[l/s]$ | 水路幅 $B[cm]$ | 河床勾配 $i$ | 水深 $h[cm]$ | 蛇行波長 $L\ [m]$ |
|---|---|---|---|---|
| 6.4 | 54.0 | 1/200 | 3.0 | 9.3 |

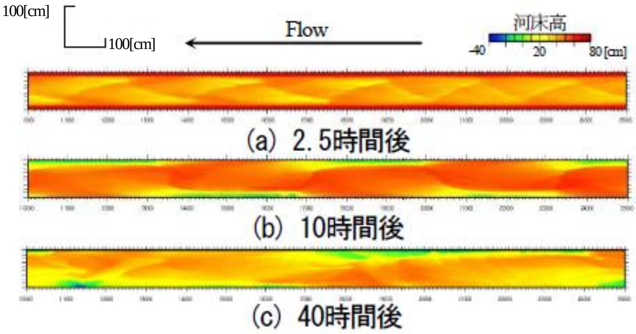


図-2 Akahori[14]らの実験における各時間の河床高

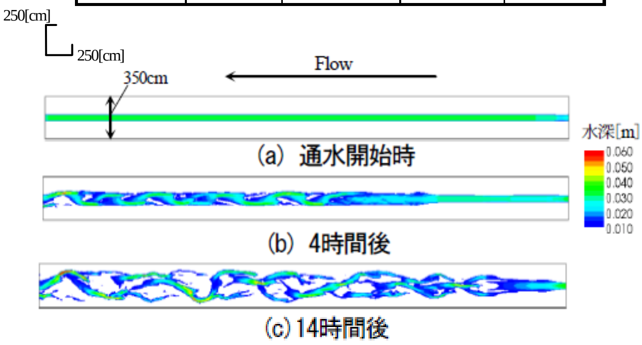


図-3 数値計算による各時間の水深

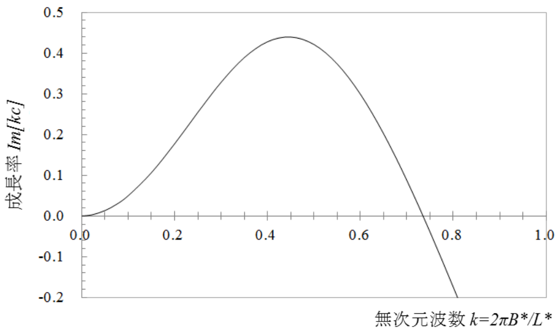


図-4 実験データによる成長率の解析結果

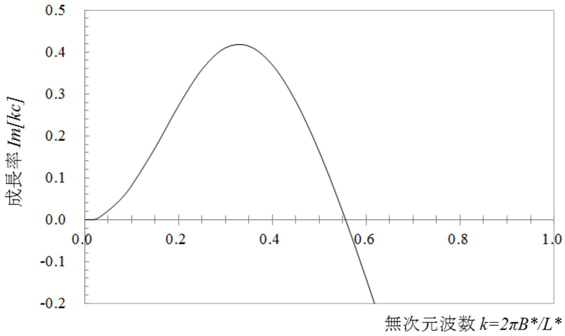
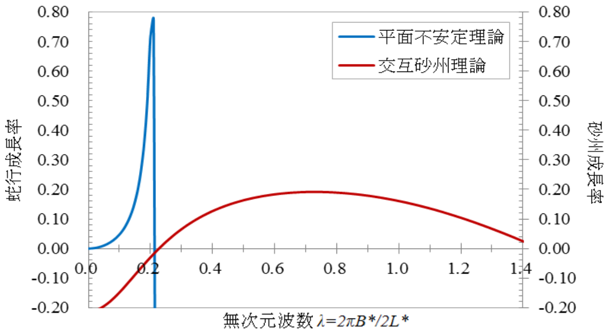
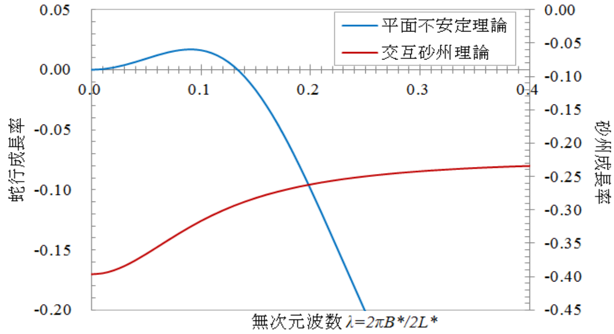


図-5 数値計算データによる成長率の解析結果



(a) 実験データによる解析結果



(b) 数値計算データによる解析結果

図-6 Blondeux Seminara[8]による解析結果

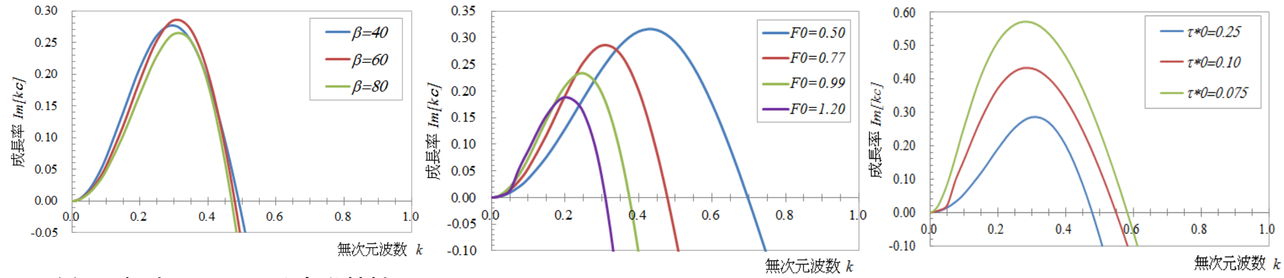
理論で卓越波長を計算すると，それぞれ14.0m，4.0m となる．平面不安定理論による卓越波長は実測波長に近く，交互砂州理論の中立安定域近くに現れている．交互砂州卓越波長は小さめである．本研究の卓越波長をこれらと比較すると，波長はBlondeux Seminaraの交互砂州波長の3倍ほどであり，平面不安定理論の波長に近い値になっている．Blondeuxらは，側岸固定の交互砂州発生理論による波長が平面不安定理論及び実測の波長の1/3ほどにしかならないことを主張し，砂州性蛇行成因説を否定している．しかし，本理論によれば側岸浸食を伴う交互砂州波長は十分大きくなることができ，蛇行現象が平面不安定の機構に引き継がれ得ることを示している．

数値計算データによる結果(図-6(b))では，砂州成長率が負になっておりシミュレーション結果に対応していない。また，平面不安定理論による卓越波長も18.8mと計算波長の2倍程度大きい．一方，本安定解析理論で得られた卓越波長はより計算値に近い値を示しており，砂州性蛇行ゆえの結果を得たと解釈することができる．しかし，多くのデータをもとにさらに解析する必要がある．

### (3) パラメータの変動特性

本研究における不安定解析モデルを用いて，各種水理量を変化させその挙動を調べる．図-7は川幅水深比$\beta$，Froude数$F_0$，無次元掃流力$\tau_{*0}$を変化させ，その成長率を示したものである．

図-7，(a)より川幅水深比の変化では蛇行波長，成長率の大きさともに大きな変化は見られない．Blondeux Seminara[8]の砂州成長率曲線と比較しても卓越波長に大



(a) 川幅水深比による変動特性　(b) Froude数による変動特性　(c) 無次元掃流力による変動特性

図-7 各種パラメータ変化に対する成長率の変化(粒径水深比=0.005, 側岸傾斜角=30[deg], 天端高水深比=1.0)

きな変化は見られないことから，側岸移動を考慮した場合でも卓越波長は固定壁と変わらないと考えられる．

図-7，(b)について本安定解析モデルではFroude数の増大に伴い，波長が増大する傾向が見られた．この結果はBlondeux Seminara[8]による交互砂州理論と類似した傾向である．

図-7，(c)について無次元掃流力は成長率の振幅に影響するものの，卓越波長については変化が見られない．無次元掃流力が増大しても洗掘が大きくなるのみで，蛇行波長の変化は生じないものと考えられる．また，限界掃流力に近くなると，数学的性質上，無限大に発散することから，限界掃流力を用いない浸食モデルを用いる必要性があるといえる．

## ５．結論

本研究の不安定解析結果から，側岸浸食を伴う交互砂州理論は先行研究による交互砂州理論より波長が伸びる傾向が見られた．この結果は，波長の短い交互砂州から長い波長を持つ平面不安定蛇行への移行が可能であることを示唆する．

また，数値シミュレーションの発達した状態での結果は，本安定解析ではその特性を解釈できるがBlondeux Seminaraの平面不安定理論では説明できない．これは，砂州性蛇行の独自の発達を裏付けている．

さらに，本研究における安定解析モデルでは，卓越波長変化に大きく影響するパラメータはFroude数であるといえる．しかし，この傾向は実現象において必ずしも成り立つとは言えず，この点は検討を要する．

### 参考文献

1)小田島大祐・桑村貴志・永田朋紀：音更川における出水時の堤防一部流出の原因分析について，http://www.hkd.mlit.go.jp/topics/gijyutu/giken/h23_pre_intra/pdf_files/aa/aa-16.pdf，2011

2)木下良作：河床における砂礫堆の形成について―蛇行実態の一観察―，土木学会論文集，42号，1-21，1957

3)木下良作：石狩川河道変遷調査，科学技術庁資源局資料第36号，1961

4)土木学会水理委員会研究小委員会（代表 芦田和男）：洪水流の三次元流況と流路形態に関する研究，3，4，58-118，1982

5)Engelund, F. : Flow and bed topography in channel bends, *J. of Hyd. Div., ASCE*, Vol.100, No.HY11, 1974

6)池田駿介・日野幹雄・吉川秀夫：河川の自由蛇行に関する理論的研究，土木学会論文報告集，第255号，1976

7)Ikeda, S., G. Parker and K. Sawai : Bend theory of river meanders, Part1. Linear development, *J. of Fluid. Mech.*, Vol.112, 1981

8)Blondeaux, P. and G. Seminara : A unified bar-bend theory of river meanders, *J. of Fluid Mech.*, Vol.157, 449-470, 1985

9)Tubino, M. and G. Seminara : Free-forced interactions in developing meanders and suppression of free bars, *J. of Fluid Mech.*, Vol.214, 131-159, 1990

10)Seminara, G. : Meanders, *J. of Fluid Mech.*, Vol.554, 271-297, 2006

11)Mosselman, E.: Theoretical investigation on discharge induced river-bank erosion, Communications on hydraulic and geotechnical engineering, Delft University of Technology, 1989

12)平野宗夫：拡幅を伴う流路の変動について，土木学会論文報告集，第210号，1973

13)長谷川和義：非平衡性を考慮した側岸浸食量式に関する研究，土木学会論文報告集，第316号，1981

14) Akahori, R., Yamaguchi, S., Kimura, I., Iwasaki, T., Shimizu, Y. and Hasegawa, K.: Evolution of channel bed topography in a 50-meter laboratory flume under various hydraulic conditions of bar instability and resonance, River, Coastal and Estuarine Morphodynamics 2011(CD-ROM), pp. 1998-2009, 2011

15) Parker G. Shimizu Y., Willkerson G.V., Eke E.C., Lauer J.W., Paola C., Dietrich W.E. and Voller V.R.: A new framework for modeling the migration of meandering rivers, EARTH SURFACE AND LANDFORMS, pp. 70-86, 2011

16) http://i-ric.org/ja/index.html

(2012. 9. 30受付)