平成21年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第66号

急勾配河川における三角状水面波列の発生条件について

Hydraulic conditions for generation of rooster-tail jump in steep movable channels

先端技術開発センター（北開水工コンサルタント）○フェロー　長谷川　和義 (Kazuyoshi Hasegawa)
北開水工コンサルタント　正　員　山　口　甲 (Hajime Yamaguchi)
北開水工コンサルタント　正　員　伊　賀　久晃 (Hisaaki Iga)
北海道開発局帯広開発建設部治水課　辻　珠希 (Tamaki Tsuji)

１．まえがき

扇状地や山地部を流れる急流河川の中には、洪水時に非常に波高が高く三角状に尖った水面波の連なりに覆われる河川がある。昭和 56 年 8 月 23 日に豊平川で発生した三角状水面波列がよく知られている（山口[1)]）。この時における水面波の波頂は、南 22 条橋上流地点で河岸洪水痕跡水位から平均 4.86m ほどの高さに達したと報じられており、堤防高までの差が 0.5m を切るに至った箇所も現れた。このような計画高水位高より高い波の発生は橋桁への衝突が懸念されるほか、氾濫への影響が心配される。しかし、三角状水面波列に関しては不明なことが多く、特にいかなる条件で発生するかが十分明らかにされていない。

最近、北海道開発局帯広建設部によって十勝川千代田に新水路が掘削され、その一部に各種観察の可能な実験水路が新設された。今春その実験がおこなわれた際に、実験目的とは関係なく水路内に発達した三角状水面波列が発生した（図-1、2、3、4）。図-1 は三角波列が発生し始めたころのもので、側岸の侵食が進み幅広になった区間で斜め水面波が目立った発達を示している。図-2 はそれから 3 分ほど後のもので典型的な三角状波列が現れている（流量約 30m³/s）。これらの波は 3 次元的な跳水とも見られ、波頂部分が砕けて巻いた形をしている。雄鶏の尻尾に似ていることから、外国ではこの種の波列を rooster-tail と呼称しているようである。日本における正式な名称はないようで、古くは木下が実験水路で発生した波列に「線状跳水」という呼称をあたえた。土木学会では下流に下る反砂堆としての性質に着目して「流下反砂堆」と呼ぶことがあるが、水面波の特徴が見えないせいかあまり使われていないようである。図-3 は、流量がおよそ 50m³/s のときの様子で波高がより高くなっている。しかし、形状は図-2 の場合に酷似している。図-4 は、波列の全体の様子を見たものであり、豊平川昭和 56 年 8 月洪水の場合によく似た様子が確認できる。この波の特徴は絶えず変動することで、発生時は同じ場所に留まっていることが多いものの、現れて数分もたたずに消えて再び急速に発達するということを繰り返す。しかも、ある区間のみに飛び飛びに発生することが多い。

今回の千代田実験水路における事例は、三角状水面波列の発生条件や形態を明らかにする上で貴重なものであり、以後著者の一人が提唱してきた発生条件の検証のために用いることにする。

図-1 三角状水面波列の発生開始のころ

図-2（左）発生後 3 分における発達した水面波列（流量約 30㎥/s）
図-3（右）流量約 50㎥/s における水面波列

図-4 流量約 50㎥/s における水面波列全体の様子

２．三角状水面波列の成因と発生条件

三角状水面波列の発達は、河床における3次元反砂堆（流下反砂堆）の成長と密接に関係している。というより、3 次元反砂堆（流下反砂堆）形成過程の一側面である。しかし、これらの発生原因や発生条件に関する研究は、長谷川ら [2)3)]以外はほとんど見あたらない。彼らは、3 次元反砂堆（流下反砂堆）は射流下で発生する通常の 2 次元反砂堆が水面における斜め交錯波の影響によって変形したものと考えている。すなわち、2 次元反砂堆の波長と斜め交錯波の流下方向波長が等しくなった場合に河床と水面両者の干渉が激しくなり（共振）、河床が 3 次元的に変形するとともに水面において激しい跳水が発生するとしている。したがって、三角状水面波列が発生する水理条件は、2 次元反砂堆の波長と斜め交錯波の流下方向波長が等しくなる条件ということになる。

2.1　2 次元反砂堆の波長に関する理論

反砂堆の発生条件や卓越波長については多くの研究がある。有名なのは Kennedy(1963)[4)]によるもので、卓越波数式が式(1)であたえられる。

$$Fr^2 = \frac{2 + kh\tanh(kh)}{(kh)^2 + 3kh\tanh(kh)} \qquad (1)$$

また、Reynolds(1965)による発生限界、林(1970)[5)]による発生限界(C=0)、Parker(1975)による発生上限は同じ式で、式(2)にて表される。

$$Fr^2 = \frac{1}{kh\tanh(kh)} \qquad (2)$$

ただし、k = 反砂堆の波数= $2\pi/\lambda$、Fr= 平均流のフルード数、h = 平均流の水深。

図-5 は、式(1)、(2)を比較したものである。同一の Fr に対して、式(2)による kh は式(1)の kh より大きめの値をとる、すなわち短めの波長をとる。林(1970)によれば、式(2)は発生限界曲線の一つで反砂堆に対してのみ成り立つものであるが、結果的に実験水路における値に良く一致している。

次に、これらの式から波長を陽な形で求めるために、双曲線関数部分についてテーラー展開をおこない第２項までとって整理する。式(1)、(2)はそれぞれ式(3)、(4)になる。

$$F_r^{\ 2} = \frac{2 + (kh)^2 - \frac{1}{3}(kh)^4}{4(kh)^2 - (kh)^4} \qquad (3)$$

$$Fr^2 = \frac{1}{(kh)^2} + \frac{1}{3} \qquad (4)$$

これらから波長式として、それぞれ

$$\frac{\lambda}{h} = \frac{2\pi\sqrt{F_r^{\ 2} - \frac{1}{3}}}{\sqrt{F_1}}\ , \qquad (5)$$

$$F_1 = 2F_r^{\ 2} - \frac{1}{2} - 2\sqrt{F_r^{\ 4} - F_r^{\ 2} + \frac{1}{6}}$$

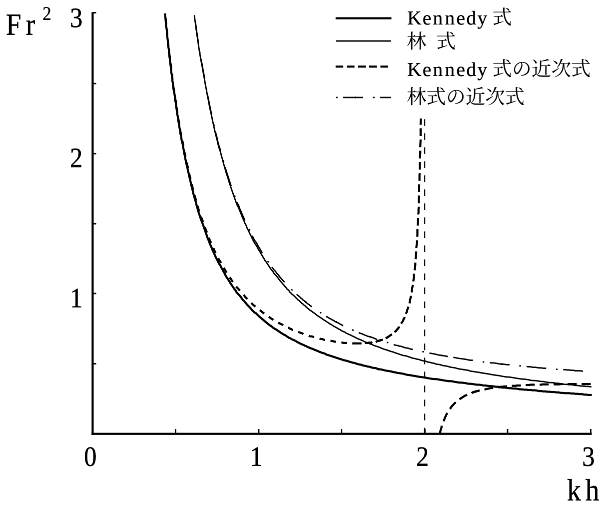

図-5 反砂堆波数の理論式、近似式の比較

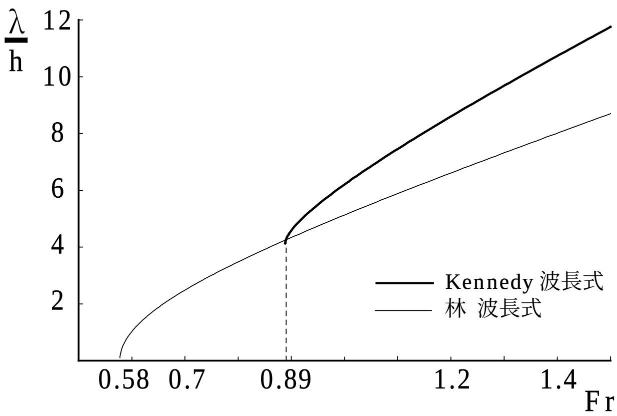

図-6 Kennedy 式および林式による反砂堆理論波長

$$\frac{\lambda}{h} = 2\pi\sqrt{Fr^2 - \frac{1}{3}} \qquad (6)$$

が得られる。式(1)の近似関数式(3)は $kh=2$ において分母がゼロとなり近似が破れるが、反砂堆においては多くの場合 $kh<2$ であり以後もこの範囲で考察する。近似関数を基にして求めた波長式においても、式(5)では $Fr>0.89$、式(6)では $Fr>0.58$ の制約が付されることになる。図-6 は式(5)、式(6)を比較したものであり、同一フルード数に対して Kennedy 式が大きめ、林式が小さめの推定値を示している。長谷川 [3)]は、山地河川におけるスッテプ・プール波長に式(6)を採用し、Fr 数を Hey の平均流速式によって表して最終的に河床勾配の関数として表示した。多くの渓流河川で良く一致しており、実験水路や山地小河川では林式に基づく式(6)を用いるほうが良いようである。

2.2　斜め交錯水面波の理論波長

射流流れの開水路では水面に峰線が斜めに交錯した水面波が発達する。一般に射流では、平均流速が波の進行速度より大きいために表面の波を流下させてしまうが、

水路に対して斜め方向に進行する波は水路方向の進行速度を大きくすることができ、平均流速とつりあってその場に留まることができる。このような水面波を斜め交錯波と呼んでおり、その波数とフルード数の関係を微小振幅を仮定した定常 Airy 波の分散関係によってあたえることができる。実験によれば、かなり大きな振幅の水面波に対してもこの関係が成り立つ。すなわち、

$$Fr^2 = \frac{\beta h \tanh(\beta h)}{(k_w h)^2} \quad , \quad \beta = \sqrt{k_w{}^2 + l_w{}^2} \qquad (7)$$

ただし、 k_w = 斜め交錯波の流下方向波数 $=2\pi/\lambda_w$、l_w = 斜め交錯波の横断方向波数= $2m\pi/B$、 B = 水路幅、m = 斜め交錯波の横断方向波数モード（横断方向波長が水路幅に一致する場合に１）で整数をとる。

扱いを簡単にするために、式(7)の近似表現をおこなうと次式になる。

$$Fr^2 = \frac{\alpha\beta h}{(k_w h)^2} \quad , \quad \alpha = 0.83 \qquad (8)$$

2.3　共振条件

さて、振幅が極めて大きい三角状波列は、水面における斜め交錯波が河床における反砂堆起伏に対して共振状態に至った結果発生するものと考える。この条件は両者の波長が一致することであり、式(3)または式(4)の波数 k と式(8)の波数 k_w が一致するということと同じである。前者を後者に代入して整理すると、

式(3)からは、

$$\frac{B}{h} = \frac{2\pi\alpha\left(F_r{}^2 - \frac{1}{3}\right)m}{\sqrt{F_r{}^4 F_1{}^2 - \alpha^2\left(F_r{}^2 - \frac{1}{3}\right)F_1}} \qquad (9)$$

式(4)からは、

$$\frac{B}{h} = \frac{2\pi\alpha\left(F_r{}^2 - \frac{1}{3}\right)m}{\sqrt{F_r{}^4 - \alpha^2\left(F_r{}^2 - \frac{1}{3}\right)}} \qquad (10)$$

が得られる。図-7 は、横軸にフルード数、縦軸に幅水深比 B/h をとり、m=1 の場合につき式(9)および(10)を描いたものである。両者ともフルード数の増加とともに B/h が一定値に近づく変化を見せ、$Fr>1$ において Kennedy 式で $B/h=11$ 、林式で $B/h=5$ 近傍の値を取っている。したがって三角状水面波列発生の条件は、簡単に表示して、流れが射流であること、および

$$\frac{B}{h} \approx 11 \qquad (11), \qquad \frac{B}{h} \approx 5 \qquad (12)$$

であることになる。

2.4　部分的共振による発生条件

ところで、河床波の λ と水面波の λ_w が完全に一致しなくとも互いに近い値をもつ場合には、ちょうど群波あるいはうねりの概念と同様に、部分的に位相が重なり三角状波列の部分発生が起きる。河床波と水面波の間で $\pm\lambda/9$ 程度の波長の違いがある場所では k_w　$k \pm k/9$ となるので、これを式(8)に代入した上で式(3)ないし式(4)を用いると、結果的に

Kennedy 式に対し　$$8.5 < \frac{B}{h} < 13.3 \qquad (13)$$

林式に対し　$$4.2 < \frac{B}{h} < 6.3 \qquad (14)$$

という部分発生の条件を得ることができる。ただし、m=1 の場合を想定している。図-7 に式(11)、(12)および式(13)、(14)の線（領域）を併記している。

長谷川ら [2)3)] は、山地河川における「礫段」（大礫によって構成された円弧状のステップとそれらに囲まれた円形プールからなる山地河川河床地形の一種）が、3 次元反砂堆（流下反砂堆）の砂礫河床上に残った痕跡に他ならないと考えた。このことが正しければ、礫段は三角状水面波列発生時における河床側の３次元起伏に他ならないことになる。したがって、礫段の発生条件は上述の三角状水面波列発生の条件と同じになる。多くの礫段発生実験の結果は、$Fr>1$、式(14)の条件において礫段が発生することを示している。 やはり、実験水路や山地小河川では、林式を基にした式を用いたほうが良い一致が見られる。

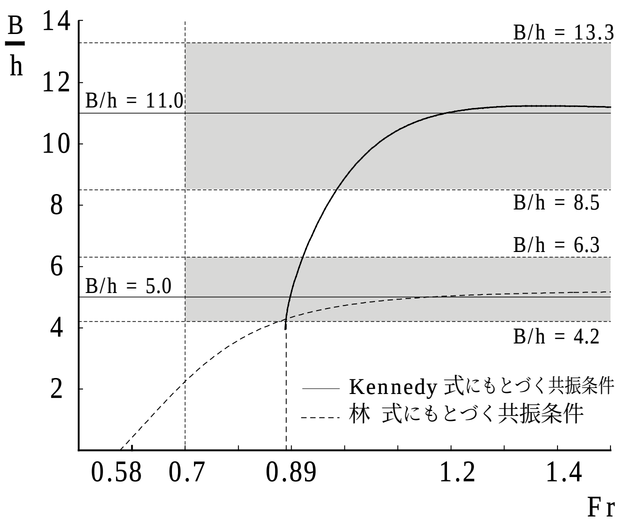

図-7 Kennedy 式および林式に基づく共振条件

３．実測値との照合

3.1　千代田実験水路における発生事例

通水中、実験水路の左岸側は護岸によって侵食が生じることなく 1:2 の斜面が保たれた一方、右岸側は侵食を受けてかなり切り立った形になり、全体として半台形状を呈することになった。このような経過から三角状水面波列発生時の幅/水深比を推定しようとすると、以下のような問題が起こる。

(1) 三角波発生時の横断面は計測されておらず、通水前

の初期断面と通水後の最終断面のみが得られている。
(2) 台形ないしは半台形断面水路において、代表幅と代表水深をいかにとるかについては必ずしも明らかではない。

ここでは、(1)に関し、流量が 30m³/s であった 5 回の観測の断面は通水前の断面に近い状態にあり、また、流量が 50m³/s となった 3 回の観測の断面は最終侵食断面に近い状態にあったと考えた。また、(2)に関しては、幅の代表値 B を（底面幅＋水面幅）/2 とし、水深の代表値 h は中央部の最大値を用いることにした。

図-8 は、以上の考えから得た 8 回の観測における幅水深比 B/h とフルード数 Fr を理論線と比較してプロットしたものである。すべての B/h 値が式(14)の範囲内にあり、林式を基にした三角状水面波列の発生条件が妥当であることを示している。

3.2　豊平川昭和 56 年 8 月 23 日洪水における事例[1]

同川の山鼻川合流点上流側地点（河道距離 18.8～19.0km）で三角状水面波列の写真撮影がおこなわれている。撮影時はちょうど洪水のピーク時であり、低水路中央主流部に並ぶ 7 峰が捕らえられている。これらの写真をもとに解析した結果として、波頂高 3.95～6.05m、平均 4.86m、波間水面高 1.99～2.37m、平均 2.18m の値が報じられている。これらの値はいずれも洪水痕跡水位からの高さである。波長は 20～60m、平均 35m であった。一方、この区間の洪水痕跡水深は 3.54m であり、断面平均の流速 5.25m/s およびフルード数 0.89 の値が報じられている。

三角波発生条件を検証するために、発生時の幅、水深、フルード数が必要であるが、豊平川は複断面河川であり、代表値をいかに採るかは難しい。しかし、この時のケースではピーク時においても洪水敷水深がごく小さく、低水路断面が現象を支配していると見ることができる。当該区間の計画低水路幅は上部 80m、下部 50m であり、千代田水路の場合と同じに平均をとると 65m である。水深は報じられている洪水痕跡水深 3.54m に波間水面高 2.18m を加えた 5.72m を用いる。これらを採用すると、B/h=11.4 を得る。推定しにくいのは低水路部流れのフルード数であるが、1.0 前後の値と見て間違いはないであろう。図-8 にこの値を落とすと、ちょうど式(13)の範囲に収まる。

もし、このときに発生した反砂堆が Kennedy 式に沿うものであったならば、発生時の B/h は式(14)ではなく、式(13)内に収まるのは当然である。Kennedy による波長式(5)に対し、Fr=1.0 をあたえると λ=35.5m となり実測値にほぼ一致する。したがって、当時発生した反砂堆は Kennedy 式に合致したものであったと考えられる。かくして理由は明らかではないが、山地・急勾配・小河川においては林式に基づく条件が妥当であるのに対し、相対的緩勾配・大河川においては Kennedy 式に基づく条件が良い結果をあたえるものとなった。

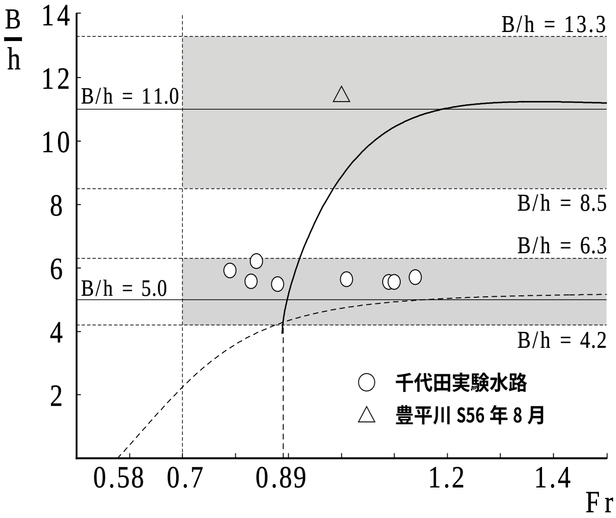

図-8 実測値による検証

4．まとめ

(1) Kennedy および林の反砂堆波数式を近似化して、陽な形の波長式を導いた。
(2) 反砂堆波長と斜め交錯水面波の波長が一致する共振条件から、三角状水面波列の発生条件を、川幅／水深比とフルード数の関係で表した。
(3) (2)の条件式を簡略表現するとともに、うねりの概念を適用して条件に幅を持たせ、

Kennedy 式に対し　$8.5 < \dfrac{B}{h} < 13.3$

林式に対し　$4.2 < \dfrac{B}{h} < 6.3$

を三角状水面波列の大まかな発生条件として得た。
(4) 実測例による検証の結果、山地・急勾配・小河川においては林式に基づく条件が妥当であるのに対し、相対的緩勾配・大河川においては Kennedy 式に基づく条件が良い結果をあたえた。

参考文献

1) 山口　甲(2005)：日本一の急流都市河川 豊平川,（財）河川環境管理財団北海道事務所, pp.126-130.
2) 長谷川和義・上林　悟(1996)：渓流における淵・瀬 (ステップ・プール) の形成機構とその設計指針, 水工学論文集, 第 40 巻, pp.893-900.
3) 長谷川和義(1997)：渓流の淵・瀬の水理とその応用, 水工学シリーズ 97-A-9(1997), 土木学会水理委員会, pp.1-20.
4) Kennedy, J. F.(1963): The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 16, pp. 521-544.
5) Hayashi, T.(1970): Formation of dunes and antidunes in open channels, *Journal of Hydraulic Division, Proc. of ASCE*, Vol. 96, No. HY2, pp. 357-366.